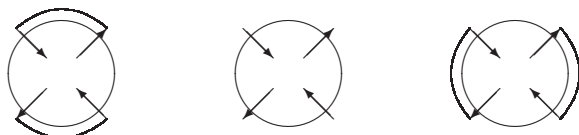


УДК 515.162.8

Функции роста групп Кокстера, ряды Пуанкаре особенностей и q -дроби 2-танглов

Г. Г. Ильюта

Функции роста групп Кокстера, действующих отражениями в геодезических линиях в двумерных пространствах постоянной кривизны, представимы как частное многочленов Александра связной суммы $(2, k)$ -торических узлов и крендельного узла [5]. Рассматривая стандартные проекции этих узлов, замечаем, что они являются замыканиями одного и того же 2-тангла – суммы 2-танглов, каждый из которых является степенью образующей группы кос из двух нитей. В статье получены близкие факты для функций роста всех групп Кокстера, для рядов Пуанкаре клейновых и фуксовых особенностей и для некоторых рядов Пуанкаре конечных групп.



Определим 2-тангл как вложение двух отрезков и нескольких окружностей в трёхмерный шар, причём на границу попадают только концы отрезков. Замыкания 2-тангла приводят к паре узлов, частное многочленов Александра которых назовём q -дробью 2-тангла (многочлены нормализованы так, что замена переменной $q \rightarrow q^{-1}$ умножает многочлен на ± 1 [2]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Ряды Пуанкаре клейновых особенностей E_6 , E_7 , E_8 и D_n представимы как q -дроби 2-танглов.*

Фуксовы особенности связаны с действием фуксовых групп на касательном расслоении верхней полуплоскости. Если фуксова группа имеет сигнатуру $(g; a_1, \dots, a_r)$, то для ряда Пуанкаре $P(q)$ соответствующей особенности имеет место формула [4]

$$P(q) = \frac{1 + (g-2)q + (g-2)q^2 + q^3}{(1-q)^2} + \sum_{i=1}^r \frac{q^2(1-q^{a_i-1})}{(1-q)^2(1-q^{a_i})}.$$

Работа поддержана грантами РФФИ-13-01-00755 и НШ-5138.2014.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Существует 2-тангл, q -дробь которого равна $(1+q)^2 P(-q)/q^{3/2}$.*

Группа Кокстера W_S порождается множеством инволюций $S = \{s_1, \dots, s_r\}$ и имеет определяющие соотношения $(s_i s_j)^{m_{ij}} = 1$. Функция роста $W_S(q)$ группы Кокстера W_S определяется как ряд

$$W_S(q) = \sum_{g \in W_S} q^{l(g)}, \quad l(g) = \min\{k : g = s_{i_1} \dots s_{i_k}\}.$$

Обозначим через $F_+(q)$ ($F_-(q)$) любой целочисленный многочлен, который делится на все многочлены $q^{\deg W_P(q)} + 1$ ($q^{\deg W_P(q)} - 1$), $P \subset S$, $1 < |W_P| < \infty$, и частные являются возвратными многочленами. Пусть $z = q^{-1/2} - q^{1/2}$ и $\epsilon = 0$ или 1 в зависимости от того нечётна или чётна степень многочлена $F_{\pm}(q)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для группы Кокстера W_S функции*

$$\frac{z^{\epsilon} q^{\deg F_+/2}}{F_+(-q)} \left(\frac{1}{W_S(-q^{-1})} + \frac{1}{W_S(-q)} \right),$$

$$\frac{z^{\epsilon} q^{\deg F_-/2}}{F_-(-q)} \left(\frac{1}{W_S(-q^{-1})} - \frac{1}{W_S(-q)} \right)$$

представимы как q -дроби 2-танглов.

Для очень общего класса групп Кокстера функция роста удовлетворяет одному из равенств $W_S(q^{-1}) = \pm W_S(q)$, в частности, если группа действует собственнo и кокомпактно на стягиваемом n -многообразии (порождающие действуют как отражения), то $W_S(q^{-1}) = (-1)^n W_S(q)$ [1].

Эйлерова характеристика группы Кокстера обратна значению функции роста этой группы в 1 [10]. Поэтому доказанные факты связывают эйлерову характеристику и значение q -дроби в -1 . Это значение известно как дробь 2-тангла; обзор приложений и методов вычисления дроби 2-тангла можно найти в [8]. Модуль значения многочлена Александра в -1 известен как детерминант узла и он равен порядку группы гомологий двулистного накрытия сферы S^3 с ветвлением на узле.

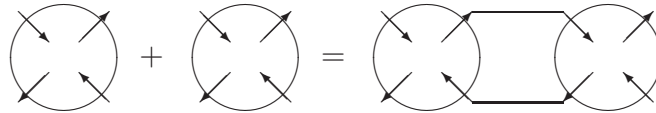
Для конечной матричной группы $G \subset SU_n$ и её характера χ ряд Пуанкаре $G_{\chi}(q)$ можно определить с помощью формулы Молина

$$G_{\chi}(q) = \sum_{g \in G} \frac{\chi(g)}{\det(1 - qg)}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если характер χ принимает целые значения и многочлены $\det(1 - qg)$ являются целочисленными, то*

функции $q^{n/2}G_\chi(-q)/z$ для чётного n и $q^{(n-1)/2}(1+q)G_\chi(-q)/z$ для нечётного n представимы как q -дроби 2-танглов.

Доказательства. В [3] ряды Пуанкаре клейновых особенностей представлены как частные многочленов Кокстера евклидовых и аффинных диаграмм Дынкина. Эти диаграммы в случаях E_n и D_n являются деревьями и их многочлены Кокстера реализуются как многочлены Александра слалом-узлов А'Кампо [6]. Евклидова диаграмма Дынкина получается из аффинной удалением вершины. Узлы А'Кампо разложимы в композицию плюмбингов Хопфа, отвечающих вершинам соответствующих диаграмм Дынкина [7] (для слалом-узлов наглядная интерпретация разложения на плюмбинги имеется в [5]). Поэтому достаточно показать, что узлы, отличающиеся одним плюмбингом Хопфа, являются замыканиями одного и того же 2-тангла. При плюмбинге Хопфа к поверхности Зейферта узла приклеивается лента. Разрезая эту ленту, мы получим 2-тангл как границу поверхности (края разреза исключаются). Одно из замыканий этого 2-тангла возвращает к исходному узлу (края разреза добавляются), а другое – к узлу до разреза ленты (края разреза склеиваются). Процесс разложения слалом-узла в композицию плюмбингов Хопфа соответствует разложению частного многочленов Александра узла до и узла после одного плюмбинга в ветвящуюся цепную дробь [6]. Эти процессы связаны теоремой Конвея: q -дробь суммы 2-танглов равна сумме q -дробей слагаемых [2].



В частности, q -дробью 2-тангла является частное многочленов Александра $(2, n)$ - и $(2, n + 1)$ -торических узлов, которые являются слалом-узлами диаграмм Дынкина A_{n-1} и A_n . Поэтому для доказательства Предложения 2 остаётся представить как q -дробь 2-тангла первое слагаемое в сумме

$$\frac{(1+q)^2 P(-q)}{q^{3/2}} = z(z^2 - g + 5) + \sum_{i=1}^r \frac{q^{-(a_i-1)/2} - q^{(a_i-1)/2}}{q^{-a_i/2} - q^{a_i/2}}$$

и применить теорему Конвея. В [9] для любого целочисленного многочлена $b(z)$ построены 2-танглы (один из другого получается отражением относительно биссектрисы первой четверти), q -дроби которых равны $zb(z^2)$ и $1/zb(z^2)$. Этот факт вместе с теоремой Конвея доказывает также Предложения 3 и 4. Функции из Предложения 3 представляются в виде суммы функций вида $1/zb(z^2)$ с помощью

формулы Стейнберга [12]

$$\frac{1}{W_S(q^{-1})} = \sum_{P \subset S, |W_P| < \infty} \frac{(-1)^{|P|}}{W_P(q)},$$

а функции из Предложения 4 – с помощью формулы Молина. Это вытекает из следующих замечаний. Если группа W_S конечна и её степени базисных инвариантов равны m_1, \dots, m_r , то $W_S(q) = \prod [m_i]$, где $[m] = 1 + q + \dots + q^{m-1}$ [11], в частности, многочлен $W_S(q)$ возвратный и делится на $1 + q$, поскольку конечная группа Кокстера имеет инвариант степени 2. Многочлен $F_+(q)$ делится на $1 + q$, поскольку $\deg W_P(q) = 1$, если $|P| = 1$. Возвратный многочлен $R(q)$ нечётной (чётной) степени представляется в виде $q^{\deg R/2} R(-q) = zb(z^2)$ ($= b(z^2)$). Возвратный многочлен нечётной степени делится на $1 + q$. Если возвратный многочлен чётной степени делится на $1 + q$, то он делится на $(1 + q)^2$. Вещественный характеристический многочлен $f(q)$ матрицы из SU_n удовлетворяет равенству $q^n f(q^{-1}) = (-1)^n f(q)$ и для нечётного n делится на $1 - q$. Многочлены $f(q)$ для чётного n и $f(q)/(1 - q)$ для нечётного n являются возвратными.

Приведём пример: для ряда Пуанкаре кольца инвариантов ($\chi \equiv 1$) бинарной группы тетраэдра формула Молина и соответствующее представление в виде суммы q -дробей из [9] имеют вид

$$G_1(q) = \frac{1}{(1-q)^2} + \frac{1}{(1+q)^2} + \frac{1}{1+q^2} + \frac{2}{1-q+q^2} + \frac{2}{1+q+q^2},$$

$$\frac{qG_1(-q)}{z} = \frac{1}{z(z^2+4)} + \frac{1}{zz^2} + \frac{1}{z(z^2+2)} + 2\frac{1}{z(z^2+3)} + 2\frac{1}{z(z^2+1)}$$

и мы получаем другое представление ряда Пуанкаре особенности E_6 как q -дроби 2-тангла.

Список литературы

- [1] R. Charney, M. W. Davis, Reciprocity of growth functions of Coxeter groups. *Geom. Dedicata* 39 (1991), 373–378.
- [2] J. H. Conway, An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties. In: *Computational Problems in Abstract Algebra*, J. Leech ed., Pergamon Press 1970, 329–358.
- [3] W. Ebeling, Poincare series and monodromy of a two-dimensional quasihomogeneous hypersurface singularity. *Manuscripta Math.* 107 (2002), 271–282.
- [4] W. Ebeling, The Poincare series of some special quasihomogeneous surface singularities. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 39 (2003), 393–413.
- [5] E. Hironaka, Coxeter links, McKay’s correspondence and 2,3,7. *Contemp. Math.* 324 (2003), 123–138.

- [6] Г. Г. Ильюта, Ряды Пуанкаре групп Клейна, многочлены Кокстера, представление Бурау и инварианты Милнора. Особенности и приложения, Тр. МИАН, 267, МАИК, М., 2009, 146–163.
- [7] M. Ishikawa, Plumbing constructions of connected divides and the Milnor fibers of plane curve singularities. Indag. Math. 13 (2002), 499-514.
- [8] L. H. Kauffman, S. Lambropoulou, From Tangle Fractions to DNA. In: Topology in Molecular Biology, ed. M.I. Monastyrsky, Springer 2007, 69-110.
- [9] H. Murakami, On the Conway polynomial of a knot with T-genus one. Kobe J. Math. 2 (1985), 117-121.
- [10] J.-P. Serre, Cohomologie des groupes discrets. In: Prospects in Mathematics, Princeton Univ. Press 1971, p. 77-169.
- [11] L. Solomon, The orders of the finite Chevalley groups. J. Algebra 3 (1966), 376–393.
- [12] R. Steinberg, Endomorphisms of Linear Algebraic Groups. Mem. Amer. Math. Soc. Nr. 80 (1968).

E-mail address: ilyuta@mccme.ru